第 5.4 节　分部积分法课堂教学设计

课程概述

课程名称：《高等数学 II1》.
课程性质：专业必修课、新授课.
总学　时： 72 学时.
教学内容： 分部积分法（2 学时）.
选自章节： 第 5 章 不定积分/ 第 4 节 分部积分法.
教　　材： 林伟初、郭安学，高等数学（经管类，下册），北京大学出版社，2018.07.

授课对象

地理 211、地理 212、地理 213；遥感 211、地信 211

课程素材准备

1）整理了分部积分有关的数学史；
2）整理了分部积分的数学思想与方法；
3）内容重构基础上创作 PPT 课件.

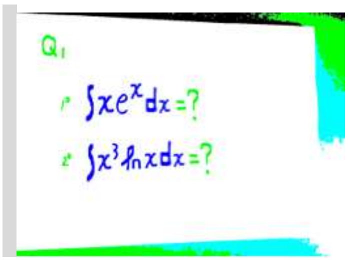
学情与重难点分析

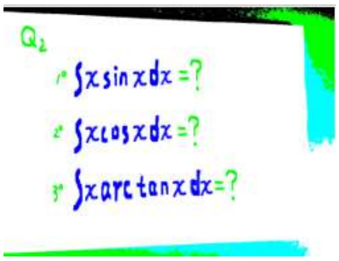
教学内容	不定积分的计算是一元函数积分学的重要内容，分部积分法是计算不定积分的重要方法，分部积分法在后续定积分的计算及多元函数积分的计算中有重要的应用.
学情分析	1. 学生已有的知识与能力： (1) 已掌握了不定积分的基本积分公式及换元积分方法； (2) 掌握了不定积分概念及相关数学思想； 2. 学生可能存在的问题及困难： (1) 学生对复杂函数不定积分的计算没有成熟的方法； (2) 学生对一些复杂函数的不定积分计算无从下手，具有一定的畏惧感，易排斥抽象复杂函数的不定积分.
教学目标	1. 知识与能力目标： (1) 掌握分部积分公式； (2) 会用分部积分公式计算一些特殊类型函数的不定积分问题. 2. 过程与方法目标: (1) 通过回顾换元积分，引导学生计算积分的一些思想，为整节课架设一个基本思维框架，让学生明确学习内容； (2) 回顾不定积分的已有计算方法，加深学生分部积分公式的认识与应用，实现知识目标. 3. 情感目标： (1) 学习归纳、类比的推理方式，体验从特殊到一般、从具体到抽象的数学思想； (2) 从实践中创设情境，渗透“化复杂为简单”、“摸着石头过河”等辨证唯物观，培养学生的创新意识.
教学重点	运用分部积分公式计算各类被积函数是积或商结构的不定积分.

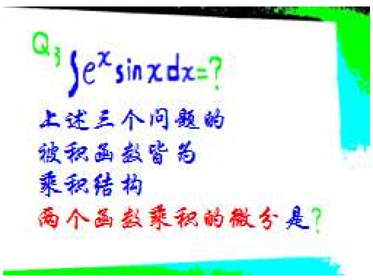
教学难点	分部积分公式的灵活应用.
教学方法与策略	从学生的认知过程来看,学生掌握数学是一个由感性到理性的过程，本节计算方法课在教学设计中采取如下教学方法与策略： 1.讲授式：在对分部积分公式计算的讲授中，注重引导学生掌握“构造”的意识； 2.启发式：为提高学生的学习兴趣 ，课程采用多向导入，运用不同的方法尝试同一问题的解决， 让学生体会如何合理利用分部积分公式简化积分的计算； 3.思维导图式：课程课时多，容量大，利用思维导图形式对各类题目进行小结，有利于学生把握“更巧妙地”使用公式，感受“摸石头过河”的思想方法.
教学思想	本课程以“全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务”为指导思想.用“问题驱动的数学教学理念”统领课程教学，力求在教学中实现培养学生具备“用数学的眼光观察世界，用数学的思维分析世界，用数学的语言表达世界”的最终能力目标. 教学中结合生活现实，将驱动教学目标的数学本源性问题通过情景展现探究.教学过程“科研化”，在教师的指导下，以学生为主体，掌握认识和解决问题方法和步骤，让学生通过“观察、思考、讨论、听讲”等独立探究，找规律，形成相应方法总结，发现相应的“技巧”.引导学生完成“做什么？为什么做？怎么做？”三个基本问题，实现对知识的理解与应用的融会贯通.

教学过程：

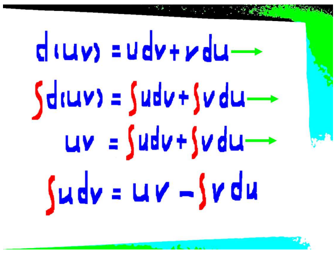
一．引入与思考



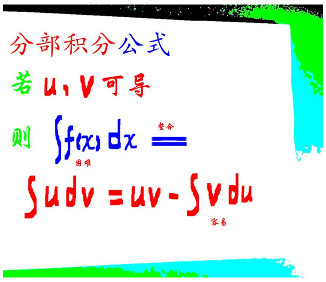




诸如此类的不定积分，用换元积分法都不能求解，需要另辟蹊径从两个函数相乘求微分的结果找解决问题的新方法--分部积分法.方法的寻找过程：



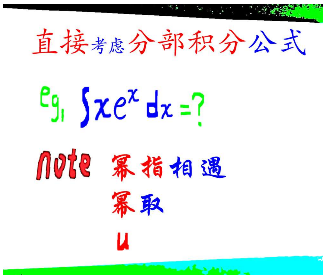
二．　分部积分公式



注 1：如果积分 $\int u\mathrm{d}v$ 不易求, 而积分 $\int v\mathrm{d}u$ 比较容易时, 分部积分公式就可用了. 积分公式包含了“化繁为简、化难为易的思想”.

三．典型例题讲解

1 . 对应引入与思考的 Q1 Q2：直接考虑用公式.



例 1（2）　求 $\int x^2e^x\mathrm{d}x.$

解：　$\int x^2e^x\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}e^x=x^2e^x-\int e^x\mathrm{d}x^2 \;=x^2e^x-2\int xe^x\mathrm{d}x$

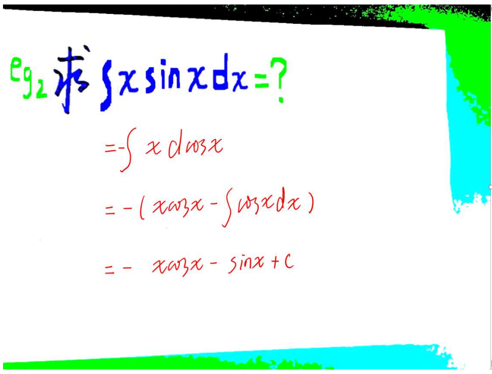
$$=x^2e^x-2\int x\mathrm{d}e^x=x^2e^x-2xe^x+2\int e^x\mathrm{d}x \;=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C.$$

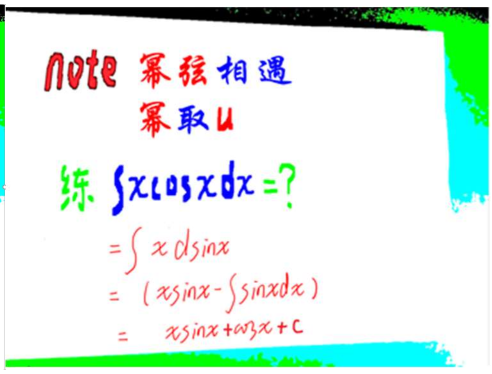
注 2：例 1（2）板书讲解中将 u 分别取作 x^2 与 e^x 试算, 让同学们发现只有一种方法是可行的, 同学们做总结与思考. 积分是构造的过程，构造是尝试的过程，更深入理解“摸着石头过河”的思想，找一条简单的路径计算复杂问题.

思政融入：这时可以问同学们如下问题：

“五四运动”后中国革命走向何方?是走“城市包围农村”还是“农村包围城市”的道路?正如我们分部积分时，u、V 的选择问题，那种选择才是解决问题的最佳选择？那种道路才是适合我们国情的最优道路？答案：“农村包围城市”，由此让同学们更进一步根植道路自信

留出 3 分钟左右的时间让学生练习，老师巡教室 若发现学生有问题，及时辅导答疑.





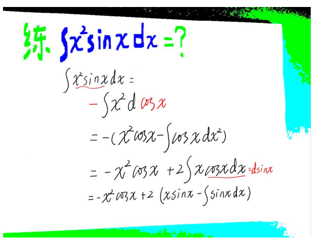
本例中，被积函数 $x\sin x$ 是两个函数的乘积, 选其中一个为 u, 另一个和 dx 凑一起做 $\mathrm{d}v$；如果选择 $u=\sin x, v'=x$，则 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)$，得：

$$\int x\sin x\mathrm{d}x=\int \sin x\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2) \quad =\frac{1}{2}x^2\sin x-\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}\sin x \quad =\frac{1}{2}x^2\sin x+\frac{1}{2}\int x^2\cos x\mathrm{d}x$$

上式右端的积分比原积分更不容易求出.

思政融入：我们之所以能过上的现在的好日子，多亏了当年毛爷爷朱爷爷等新中国的缔造者，选择了正确的道路。

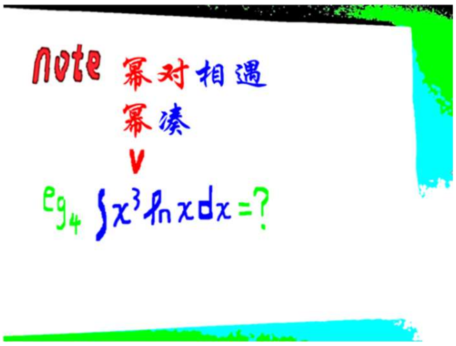
由以上两例可见，如果 u 和 $\mathrm{d}v$ 选取不当，就求不出结果或者简单问题复杂化了，所以应用分部积分法时，恰当选取 u 和 $\mathrm{d}v$ 是关键，一般，先以 $\int v\mathrm{d}u$ 比 $\int u\mathrm{d}v$ 易求为原则改写原积分的被积函数，选取 u 打造成 $\int u\mathrm{d}v$ 结构，再用分部积分公式，就可以使初始的困难积分计算问题变成容易的积分计算问题.

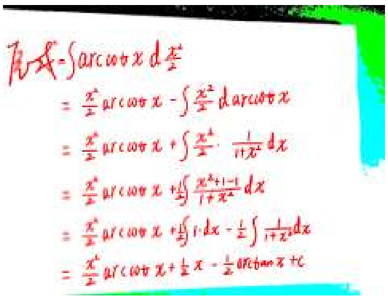


例 3　求 $\int x\sec^2 x\mathrm{d}x$.

解： $\int x\sec^2 x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\tan x \quad =x\tan x-\int \tan x\mathrm{d}x \quad =x\tan x+\ln\left|\cos x\right|+C.$

注 3： （由上面的三个例子知道）如果被积函数是指数为正整数的幂函数和三角函数或指数函数的乘积，就可以考虑用分部积分法，并选择幂函数为u. （即幂弦相遇幂取 u）经过一次积分，就可以使幂函数的次数降低一次．解决复杂问题是逐步分阶段完成的，只要每一步有更新、有进展就一定能解决问题.





以下两个问题为上面两个例子对应的课后练习 ，根据学生的课堂表现，也可以把其中一个灵活调整为课堂的限时练习。

练习 1：求 $\int x\arctan x\mathrm{d}x.$

解： $\int x\arctan x\mathrm{d}x=\int \arctan x\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2) \quad =\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}\arctan x$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x \quad =\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C.$

练习 2：求 $\int x^2\ln x\mathrm{d}x.$

解： $\int x^2\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\ln x\mathrm{d}(x^3) \quad =\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^3\mathrm{d}\ln x \quad =\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C.$

注 4：（由上面的例子可以知道）如果被积函数是幂函数与反三角函数或幂函数与对数函数的乘积,就可以考虑用分部积分法,并选择反三角函数或对数函数为u.，以幂而言，幂扮演凑 V 的角色（即幂对相遇幂凑 V 或幂反相遇幂凑 V）

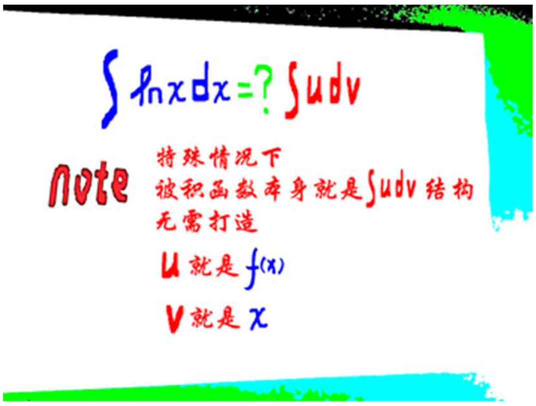
一般地,当被积函数是两类基本初等函数乘积的结构时，在多数情况下,可按五大基本初等函数之首的幂函数来考虑选取u或凑$\mathrm{d}v$.

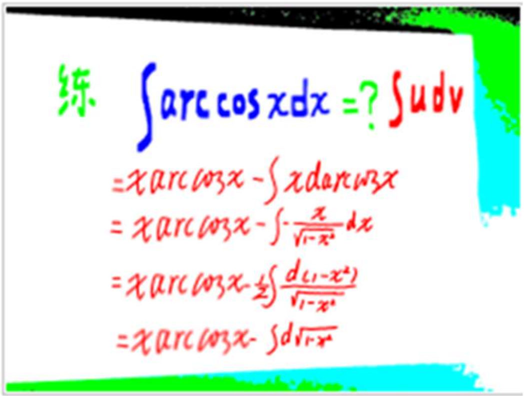
1）若被积函数是幂、指数函数相乘或幂 三角函数相乘结构，则幂做u；

2）若被积函数是幂、对数函数相乘结构或幂、反三角函数相乘结构，则幂凑$\mathrm{d}v$.

例 5　求$\int \ln x \mathrm{d}x.$

解：$\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - \int x \mathrm{d}\ln x \quad = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - \frac{1}{2}x^2 + C.$





2. 对应引入与思考的 Q3：解方程还原方法

有些不定积分的计算，在多次分部积分过程中，可能会出现原有的积分形式，这时候运用还原的方法及方程的思想，得到问题的解决.

例 7（1）　$\int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x.$

解：$\int e^x \cos x \mathrm{d}x = \int \cos x \mathrm{d}e^x = e^x \cos x - \int e^x \mathrm{d}\cos x$

$= e^x \cos x + \int e^x \sin x \mathrm{d}x = e^x \cos x - \int \sin x \mathrm{d}e^x \quad = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \mathrm{d}\sin x$

$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \mathrm{d}x,$

等式右端的积分与原积分相同,把它移到左边与原积分合并,可得

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C.$$

例 7（2） $\int \sec^3 x \mathrm{d}x.$

解： $\int \sec^3 x \mathrm{d}x = \int \sec x \sec^2 x \mathrm{d}x = \int \sec x \mathrm{d} \tan x = \sec x \tan x - \int \tan x \mathrm{d} \sec x$

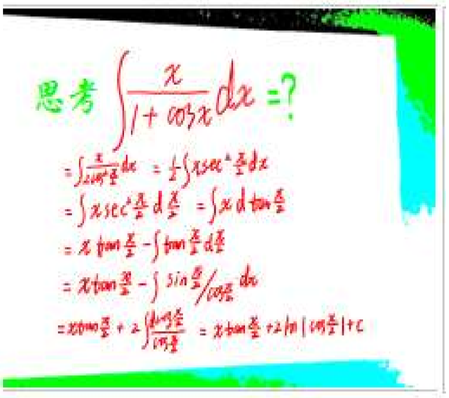
$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \mathrm{d}x = \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \mathrm{d}x$

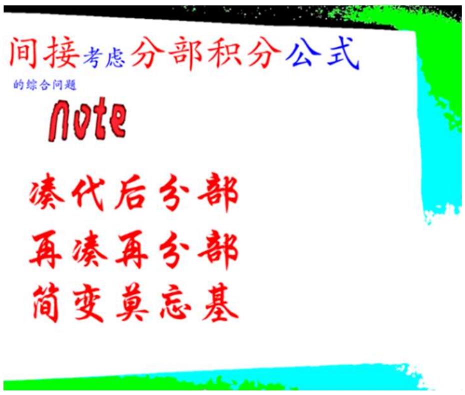
$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \mathrm{d}x + \int \sec x \mathrm{d}x = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x \mathrm{d}x.$

所以 $\int \sec^3 x \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} \sec x \tan x + \dfrac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C.$

3. 第三类问题：综合多种积分方法解决复杂问题

注 5:当我们对求不定积分的几种方法熟练掌握了并且有了深刻理解之后，遇到综合性的不定积分计算问题，就可以灵活地应用这些方法，高效地解决不定积分的计算问题.





例 8 $\int \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 3}} \mathrm{d}x.$

解： 令 $t = \sqrt{e^x - 3}$, 则 $x = \ln(t^2 + 3)$, $\mathrm{d}x = \dfrac{2t}{t^2 + 3} \mathrm{d}t$, 于是

$\int \dfrac{xe^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 3}} \mathrm{d}x = 2\int \ln(t^2 + 3) \mathrm{d}t = 2t \ln(t^2 + 3) - 4\int \dfrac{t^2}{t^2 + 3} \mathrm{d}t$

$$=2t\ln(t^2+3)-4\int(1-\frac{3}{t^2+3})\mathrm{d}t \quad =2t\ln(t^2+3)-4t+4\sqrt{3}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C$$

$$=2(x-2)\sqrt{\mathrm{e}^x-3}+4\sqrt{3}\arctan\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{3}-1}+C.$$

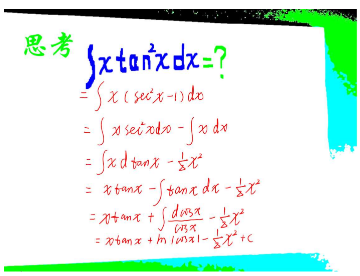
四．小结与习题

小结：本节课学习了不定积分的分部积分法方法，并初步学习了如何综合利用分部积分法在内的多种计算不定积分的方法，去解决困难复杂积分的计算问题，同学们要多观察、多思考、多练习、多总结，达到灵活地用多种方法解决复杂、综合问题的能力目标.

作业： P161 1（1），（3），（4），（6），（7），（8），（11），（16）；

练习：1 余（练习是对应因材施教理念业而布置的，不做统一要求）

思考题：（课后思考题是提升思维品质的拓展问题，是对应因材施教理念业而布置的，不做统一要求）



课程资源
1. 教材与教辅参考资料 （1）吴赣昌，《高等数学》（理工类·第五版）下册，中国人民大学出版社，2017 年. （2）同济大学应用数学系，《高等数学》下册（第七版），高等教育出版社，2014 年. （3）詹姆斯·斯图尔特，《微积分》（第六版），中国人民大学出版社，2014 年. （4）张顺燕，《数学的思想、方法和应用》（第三版），北京大学出版社，2009 年 （5）吴赣昌，《高等数学（下册）》学习辅导与习题解答（理工类·第四版），中国人民大学出版社，2012 年. （6）同济大学应用数学系，《高等数学学习辅导与习题选解》，高等教育出版社，2007 年. **2. MOOC 资源与线上材料** （1）李梦茹，高等数学国家级精品课程，爱课程 http://www.icourses.cn/sCourse/course_3964.html （2）李雨生，高等数学国家级精品资源课，爱课程 http://www.icourses.cn/sCourse/course_2181.html （3）施庆生，高等数学国家级在线课 http://www.icourse163.org/course/NJTECH-1449951170#/info **3. 课程团队与教学资源** （1）2019 年 5 月成立了以生为本、专业知识扎实、科研能力强的“高等数学”教学团队； （2）2010-至今的课程教学大纲、年度教学进度表、试题库； （3）2010-至今，多版本的“高等数学 I”教学课件； （4）面向全校开放的“高等数学 II”课程网站.