隐函数存在性定理证明的思政教学探讨

邓明香　冯永平*
（广州大学数学与信息科学学院　广东广州　510006）

摘　要：隐函数存在唯一性定理是数学分析和高等数学中一个非常重要的定理，定理的证明过程分了几个步骤，大多数教材处理不够细致.隐性融入课程思政元素，本文分了四步，探讨了如何有序地证明隐函数存在唯一性定理。

关键词：隐函数；数学分析；连续性

The Research of Ideological and Political Education in Proving Existence Theorem of Implicit Function

Deng Ming-xiang　Feng Yong-ping*
(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou　510006, China)

Abstract: The existence theorem of implicit function is an important theorem in mathematics analysis, the proof procedure is divided into many steps, and the procedure is disorganized in many textbooks as a result.In this paper, by means of guiding of ideological and political education and dividing the procedure into four steps, the existence theorem is proved orderly and logically.

Keywords: Implicit function; Continuance; Mathematics analysis

一、引入

义务教育阶段一般所接触到的函数为初等函数，其表示式是自变量的某个确定或明显的解析表达式，或是通过图表定义的函数表达式，但在数学分析、高等数学课程中接触到的函数或在学习或实际问题中讨论的主要是另外一种形式的函数，其自变量和因变量之间的对应法则是通过一个方程式（或方程组）所确定，这样通过某一特定的方程（方程组）而没有明显解析式的函数称其为隐函数。单变量函数、多变量函数的隐函数在分析函数极限、微积分学、函数极值、函数最值、平面曲线的切线与法线、空间曲面的切平面与法线、各类微分方程解的存在唯一性等方面均有广泛的应用。在所有讨论问题中，通过某一特定方程能否确定一个唯一的隐函数是其应用的基石，各类分析类教材、教学参考书中对隐函数存在唯一性定理均有详细的表述与证明，参见[1-4]。但这些教材、教学参考书中的证明过程表述得不够系统，层次关系不够清晰，多数教师讲授本节内容时只能讲述证明的基本思路及数学思想，由于抽象、晦涩、过程复杂性大多数学生很难理解并完整写出其证明过程。如何通过通俗、类别的方法让同学们理解该定理的证明一直是数学分析、高等数学类课程教师探索与研究的课题。

高校思想政治工作关系高校培养什么样的人、如何培养人以及为谁培养人这个根本问题。要坚持把立德树人作为中心环节，把思想政治工作贯穿教育教学全过程，实现全程育人、全方位育人，努力开创我国高等教育事业发展新局面。要把立德树人融入教育各环节，贯穿基础教育、职业教育、高等教育各领域[5]。2017年5月，“课程思政”被纳入中央《关于深化教育体制机制改革的意见》，从地方实践探索转化为国家战略部署[6]。2019年7月，“广东省教育厅关于强化课程思政建设一流课程的意见（粤教高【2019】7号）”为广东省高校课程思政建设拟定了指导性文件。青少年教育最重要的是教给他们正确的思想，引导他们走正路。思政课是落实立德树人根本任务的关键课程，思政课作用不可替代，思政课教师队伍责任重大[7]。鉴于培养新时代人才的重要性，从中央、教育部、各省教育厅到各级各类学校对在高等学校教学中进行课程思政教学，在专业课程教学中加入课程思政元素，都进行了相应的部署与要求，各级各类学校和专业也都进行了深入的探讨与研究，这也与国家新时代“立德树人”的高等学校人才培养目标高度吻合。经过多年的数学分析、高等数学教学与探索，结合专业课程思政教学资源，本文在隐函数存在唯一性定理证明中运用课程思政的观点探讨了引领式证明，希望对该定理的教学与实践有一定的指导与借鉴意义。

二、定理内容及思政证明探索

隐函数存在唯一性定理，若二元实值函数$F(x,y)$满足下列条件：

1.函数$F(x,y)$在以$P_0(x_0,y_0)$为内点的某一区域$D\subset R^2$上连续；

2.$F(x,y)$满足初始条件$F(x_0,y_0)=0$；

3.$F(x,y)$在D内存在连续的偏导函数$F_y(x,y)$；

4.$F_y(x_0,y_0)\neq 0$。

则：

1.存在以点$P_0(x_0,y_0)$为中心的某个邻域$U(P_0)\subset D$，在$U(P_0)$上可由方程$F(x,y)=0$唯一地决定了一个定义在某区间$\left(x_0-\alpha,x_0+\alpha\right)$上的隐函数$y=f(x)$，使得当$x\in\left(x_0-\alpha,x_0+\alpha\right)$时，有恒等式$F\left(x,f(x)\right)\equiv 0,\left(x,f(x)\right)\in U(P_0)$，并且$f\left(x_0\right)=y_0$；

2.一元函数$y=f(x)$在$x\in\left(x_0-\alpha,x_0+\alpha\right)$内连续[1]。

定理证明目标：本定理主要目标是以下三点（定理的初心）：

1.找一个小区间$\left(x_0-\alpha,x_0+\alpha\right)$；

2.使得$\forall\overline{x}\in\left(x_0-\alpha,x_0+\alpha\right)$都存在唯一的$\overline{y}$使得$F(\overline{x},\overline{y})=0$成立，且$(\overline{x},\overline{y})\in U(P_0)\subset D$；

3.证明以上函数为连续的。

定理证明的关键在于“找区间”和“证明函数的存在

注：高等学校大学数学教学研究与发展中心教学改革项目（项目编号：CMC20200216）；2020年度广州大学“课程思政”示范教学团队建设项目（广大教务【2020】40号）；线性代数“课程思政”教学的探索与实践“2020年第一批教育部产学合作协同育人项目”（项目编号：202002140010）；高等数学Ⅱ“课程思政”教学的探索与实践“2020广东省本科高校高等教育教学改革项目”。

作者简介：邓明香（1974.1—），女，讲师，硕士，研究方向微分方程数值解。

*通讯作者：冯永平（1975.2—），男，教授，博士，研究方向微分方程数值解。

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

性”，其中“找区间”“函数存在性”关键都在于“存在性”，通过某些方式将存在的对象找出来。科学发展中“发现问题”是最重要的，如何将已“存在的”对象发现、表示出来是每一个科技发展中最关键的一个环节。只有发现问题，才能进一步“分析问题”“解决问题”。

定理条件的几何意义：在满足相应条件时，曲面 $z=F(x,y)$ 与平面 $z=0$ 有一条交线 $C:\begin{cases} z=F(x,y) \\ z=0 \end{cases}$，交线 C 落在平面上 $z=0$，且 $\forall\bar{x}\in\left(x_0-\alpha,x_0+\alpha\right)$ 都有唯一的 $\bar{y}$ 使得 $Z\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ 在 C 上。

条件分析：定理条件（1）（3）说明了曲面 $z=F(x,y)$ 的光滑性，曲面处处有切平面；定理条件（2）说明曲面 $z=F(x,y)$ 与平面 $z=0$ 有交点；定理条件（4）说明交点不止一个，交点形成了一条 $z=0$ 平面内的曲线[2, 3]。

证明：证明可分以下四步：

Step1：因为 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，不妨假设 $F_y(x_0,y_0)>0$，所以由连续函数的局部保号性，存在 $U_1(P_0)=\{(x,y)\,|\,0<|x-x_0|<\beta$，$0<|y-y_0|<\beta\}\subset D$ 使得 $\forall(x,y)\in U_1(P_0)$ 有 $F_y(x,y)>0$，成立。

注1：这里面包含了“由点到面、局部到整体的”思想方法，正所谓“星星之火可以燎原”。由于没有明显的方程，要构造函数的存在性，只能从条件出发，“由本索源”。

Step2：令 $H(y)=F(x_0,y)$，$0<|y-y_0|<\beta$，因为 $F_y(x_0,y)>0$，所以 $H(y)$ 关于 y 单调递增，又因为 $F(x_0,y_0)=0$，

所以存在 y_1，y_2 使得 $F(x_0,y_1)<0$，$F(x_0,y_2)>0$ 成立。

注2：这里包含了“执果索因”的数学研究方法，有以下三个数学思想：

（1）目标是要构造一个函数，但函数不一定有明显的解析式，只能利用函数的定义去证明函数的存在性；

（2）这里也包含了一种思想，“万变不离其宗”，不论如何设定，用概念、定义证明是最基本的方法；

（3）当研究对象有多个变化因素是，通常研究方法是“抓住主要因素，忽略次要因素”，这里将两个变化因素中其中一个固定，分析对象所具有的特点；

Step3：因为 $F(x_0,y_1)<0,F(x_0,y_2)>0$ 所以由连续函数的局部保号性质存在 δ_1,δ_2 使得 $F(x,y_1)<0$，$0<|x-x_0|<\delta_1$；$F(x,y_2)>0$，$0<|x-x_0|<\delta_2$ 成立。

注3：转化的思想，化“未知为已知”“化复杂为简单”，利用连续函数的介值性定理将证明函数存在性问题转化为单变量函数是不是存在零点的问题，多维度、多角度思考问题，可能找到解决问题的突破口。当研究某问题遇到困难时，要有“求异思维”“变通思维”，初心是将复杂问题简单化，抽象问题具体化，一般问题特殊化[4, 5]；

Step4：令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则任意的 $0<|\bar{x}-x_0|<\delta$ 有 $F(\bar{x},y_1)<0$，$F(\bar{x},y_2)>0$ 令 $G(y)=F(\bar{x},y)$，$y_1\le y\le y_2$，则 $G(y)$ 关于 y 单调递增，且 $G(y)$ 是单变量连续函数，由连续函数的零点存在定理，所以存在唯一的 $\bar{y}$，使得 $G(\bar{y})=F(\bar{x},\bar{y})=0$。

综上，任意的 $0<|\bar{x}-x_0|<\delta$ 存在唯一的 $\bar{y}$，使得 $G(\bar{y})=F(\bar{x},\bar{y})=0$，令

$\bar{y}=f(\bar{x}),\forall\bar{x}\in\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right)$

注4：存在性证明，存在性一般使用构造性证明，存在的不一定能够用明显的解析形式表示，存在的形式是多种多样的。本问题将函数存在性证明转化为连续函数的零点存在性问题，比起函数的存在性，证明零点存在性是相对容易、方法相对多的问题；在这步证明中用到了由点到面、由局部到整体的思想，由于是在一个任意点处的存在性证明，而得到了一个区域内的存在性证明。

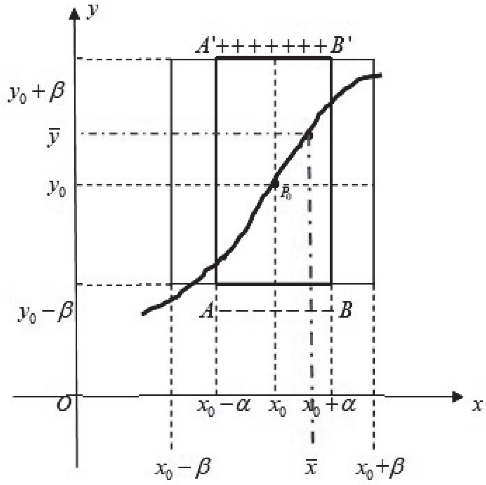

图 1 隐函数存在唯一性证明图示

下面证明 $y=f(x),\forall x\in\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right)$ 的连续性。取 $\forall\bar{x}\in\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right)$ 证明函数 $y=f(x)$ 在 $\bar{x}$ 连续。任意的 $\varepsilon>0$，对 $\forall\bar{x}\in\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right)$，$\exists\bar{y}$，$\ni F(\bar{x},\bar{y})=0$。依刚才的存在性证明过程：对 $\bar{y}-\varepsilon$ 存在 x_1 使得 $F(x_1,\bar{y}-\varepsilon)=0$ 对 $\bar{y}+\varepsilon$ 存在 x_2 使得 $F(x_2,\bar{y}+\varepsilon)=0$，令 $\bar{\delta}=\min\{|\bar{x}-x_1|,|\bar{x}-x_2|\}$ 则对 $\forall\bar{x}\in\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right)$ 任意的 $\varepsilon>0$，$\exists\bar{\delta}$，当 $0<|x-\bar{x}|<\bar{\delta}$ 都有 $|y-\bar{y}|<\varepsilon$。

注5：连续性的证明，由于该函数没有明显的解析式，用传统的连续性证明有比较大的困难，这是要回归本源，利用逆向思维及连续性的概念，给出连续性证明，仍然用到了由点到面的思想及“追本溯源”的思想；当没有明显解析式时，传统的方法都是失效的，没有直接的方法时，要利用变向思维、发散思维、异向思维解决问题，这也是常用的数学思想方法及解决复杂问题的思考模式。几何图形的辅助设计，可以直观看到相关的证明过程，由“抽象到具体”，借助几何直观在解决数学类问题时也是常用的一种技巧。

用同样的方法可以证明多元函数的隐函数存在唯一性定理，全微分存在定理[6–8]。

三、结束语

隐函数存在唯一性定理是数学分析、高等数学中一个非常重要的内容，在分析函数性质方面有广泛的应用。如何通过构造函数证明存在性有一定的技巧，熟能生巧，只有经过大量的训练、结束语问题类型及发现、归纳构造的模式，才能以不变应万变。在专业课程教学中隐性融入思政元素，既能让学生更快速、更通俗地学习新知识，又能在学习中通过“润物细无声”的方式受到社会主义核心价值观教育，树立正确的“人生观、世界观、发展观”三观教育。在数学课程教学中，思政元素一般是通过传扬优秀数学文化、歌颂优秀数学家经典故事、讲述研究对象中包含的数学思想方法和科学方法论等这些形式展开。但如何隐性融入、如何找到恰当的“数学思政元素”，

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

提升高校二级学院行政管理工作效能的新思考

徐燕娟
（江苏城乡建设职业学院　江苏常州　203017）

摘　要：随着时代的进步，教育事业也在不断改革创新发展，许多高校实行二级管理制度。高校二级学院行政管理工作成为高校教学管理工作和基层教学中的重要组成部分，其工作效能直接影响高校的执行能力，制约高校在教育事业中的创新与发展。本文主要对提升高校行政管理工作效能进行分析探讨，希望不断促进高校管理工作水平，为社会培养出高素质的复合型人才。

关键词：高校二级学院；行政管理工作；提升策略

有关学者认为“行政管理、传承知识和科学研究，是构成高校的三大要素”。由此可见，提升高校二级学院行政管理工作水平，是高校开展教学工作的基础。随着国家高校二级学院发展规模逐渐扩大、高校学生人数的增加为高校二级学院行政管理工作提出新要求。因此，高校要始终把思想政治工作贯穿教育教学全过程，实现全程育人、全方位育人教学原则放在重要位置。完善高校管理机制，为学生营造良好的校园环境，要求行政管理人员做到治理有方、管理到位，培养全面发展的高素质人才，实现教育强则国家强的教育目标，提高我国高校教育发展水平，促进国家核心竞争力的提高。

一、提升高校二级学院行政管理工作效能的必要性

高校二级学院行政管理工作效能属于综合性的评价标准既包含了工作效率，同时也要求达到一定的管理质量与成效，具有改变与制约教育教学发展的能力。二级学院行政管理工作在高校教育中不只是代表着管理高校经营的投资与产出比率，而是以行政服务为基础，根据高校教育目标、行政管理部门依法行政的能力、水平、程度，以及在教育发展中产生的经济、社会、政治等方面的综合效益。因此，提升高校二级学院行政管理工作效能的必要性共体现在以下几个方面：

作者简介：徐燕娟（1987.12—），女，汉族，江苏常州人，本科，助理研究员，研究方向为行政管理。

（一）是新时代国家发展的必然要求

在实现中华民族伟大复兴中，教育的地位和作用不可忽视，高等教育发展水平决定着国家发展水平和发展潜力。[1]由此可见，在高校建立高质量教学体系中高校的管理能力和水平是提高教学质量的重要条件。而在高校管理工作中的核心要素就是行政管理工作效能。国家发展中提出的指导思想和战略措施不断促进高校教育管理体制建设创新发展，要求提升高校行政管理效能，为建设高质量教育体系奠定坚实的基础，始终坚持贯彻落实国家现代化发展的必然要求。

（二）是高校教育创新发展的客观需求

根据中共中央、国务院印发的《深化新时代教育评价改革总体方案》中指出：“教育评价事关教育发展方向，有什么样的评价指挥棒，就有什么样的办学导向。”要求高校提高教育治理能力和水平，加快推进教育现代化、建设教育强国。因此，在高校行政管理中要转变以往不科学的教育理念，不断优化高校管理机制，创新管理途径，打造出具有该校自身发展特点的行政管理模式，实现行政管理效能提升转型。尤其是现在新课改的深入发展，对高校改革发展带来新的机遇和挑战，如果缺乏较高的行政管理效能，就无法面临这些挑战，导致教育改革出现停滞不前的状况。因此，提升高校二级学院行政管理工作效能是高校教育创新发展的客观需求。

（三）是提高高校办学发展内生动力的需要

根据国务院印发的《统筹推进世界一流大学和一流学科建设总体方案》中提出的基本要求：“建成一批世界一流大学和一流学科，提升我国高等教育综合实力和国际竞争力”[2]。而在此过程中高校的首要任务就是提升一流的行政管理效能，才能有一流的行政管理和服务为高校创造良好的教学环境和丰富的教育资源，利用完善的文化建设制度、创新的管理方式，才能更好地培育出一流的人才。因此，为了促进高校达到国家一流战略目标，必须提升高校二级学院行政管理工作效能。

如何传扬中国优秀数学文化，还需要经过大量的探索与实践，这些探索一方面与所讲授的课程内容也有直接的关系，这是根本，也是教育之本；另一方面与思政教育素材的准备、隐形嵌入也有关系，这是教育的方式与方法。在本定理证明过程中包涵了许多丰富的数学思想方法，诸如逆向思维、异向思维、发散思维、局部与整体、执果索因等多种数学思维方法与科学方法论。本定理证明中的课程思政教学模式，可以推广到大多数难度较大定理的证明及综合性计算的数学问题。

参考文献：

[1] 陈纪修等.数学分析第二版[M].北京：高等教育出版社，2004.

[2] 华东师范大学数学系.数学分析[M].北京：高等教育出版社，2014.

[3] 吴彦强.关于《高等数学》几个教学内容的处理[J].科技风，2020（19）：35+37.

[4] 张再云，江五元，丁卫平，等.关于隐函数存在定理的注记[J].湖南理工学院学报（自然科学版），2020，33（1）：10-11.

[5] 秦华，闫妍.习近平在全国高校思想政治工作会议的讲话（节选）[EB/OL].https：//youth.sdut.edu.cn/2019/1219/c7001a363369/page.html，2016-12.

[6] 中共中央办公厅，国务院办公厅.关于深化教育体制机制改革的意见[J].人民日报，2017.

[7] 习近平.思政课是落实立德树人根本任务的关键课程[J].当代广西，2020（17）：4-7.

[8] 裴礼文.数学分析中的典型问题与方法（第二版）[M].北京：高等教育出版社，2006.

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net