高次矩阵方程矩阵逆的计算方式研究

邓明香　冯永平

（广州大学数学与信息科学学院，广东，510006）

摘　要　逆矩阵在线性代数中占有非常重要的地位，巧妙地使用逆矩阵的性质可计算部分特殊矩阵的逆矩阵，一般矩阵逆的计算非常困难。本文对满足一类高次矩阵方程的矩阵探讨了逆矩阵的存在性与计算方法，通过实例说明了算法的可行性与有效性。

关键词　矩阵多项式；逆矩阵；带余除法

中图分类号:G642.0　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1002-1221(2022)04-0064-02

一、引言

矩阵是高等代数、线性代数中的最重要内容，在学科教学、实际应用中都有非常广泛的应用。其中逆矩阵是矩阵内容中一个重要概念，其在求解线性方程组、矩阵方程，研究线性变换的反变换，讨论各类反问题，求解微分方程，分析隐函数性质，探讨复杂算子性质等方面都有非常广泛应用。鉴于内容的重要性，判别矩阵可逆及如何计算其逆矩阵已有很多的方法，大多数教材中也有对此类问题的讨论。文献 [1] 中详细介绍了矩阵逆的定义、性质与运用伴随矩阵公式计算的方法; 黄玉兰、黄翔等总结了常见的计算逆矩阵的方法，如基本公式法，带状矩阵逆矩阵的计算等，见 [2]，[3]; 文献 [4]，[5] 中讨论了一些特殊矩阵的逆矩阵计算方法，例如三对角矩阵、低次幂矩阵多项式的逆矩阵计算; 文献 [6] 基于 TPACK 理论，结合线性代数中逆矩阵在密码等学科中的应用进行了教学设计，从中可得到启发教师可联系现实生活中的例子通过设置问题，学习新知，分析问题，解决问题等教学环节，调动学生探究新知识与新方法的积极性，并且使学生切身体会到生活中数学有广泛的应用; 文献 [7] 以线性代数教学中的几类重要问题“求矩阵多项式的逆矩阵”为例，利用多项式的带余除法理论等，特别是综合除法介绍了最常见的一类矩阵多项式求逆的具体计算方法，使得这类问题的求解更简单高效、容易掌握，且这种方法具有一定的构造性，也可使此类问题的解决思路更加清晰，激发学生后续对线性代数课程学习的兴趣。文献 [8] 中借助多项式理论，给出轮换矩阵的系列性质，并给出了轮换矩阵可逆的判定定理及其逆矩阵的计算方法，最后通过具体算例进行验证; 杜晓宁，罗东等对常见的求逆矩阵的方法进行了初步的归纳总结，见文献 [9]。

矩阵多项式是矩阵分析中一个较重要的内容，在实际问题中有广泛的应用，求满足某类方程的矩阵逆具有重要的应用价值。本文针对一类满足二次矩阵方程、三次矩阵方程或高次矩阵方程的矩阵，分别通过构造的方法和多项式带余除法理论讨论其逆矩阵的存在性及计算方法，并给出一般性结论及相关特殊实例。下面从满足 n 次方程的矩阵出发，尝试讨论这类矩阵逆的存在性与计算方法，希望问题的研究对于相关知识点学习能起到抛砖引玉的作用。

作者简介：邓明香（1974- ），女，硕士，讲师，从事微分方程数值解的研究。

通讯作者：冯永平（1975- ），男，博士，教授，从事微分方程数值解研究的研究。

基金项目：线性代数“课程思政”教学的探索与实践（2020 年教育部产学合作协同育人项目 202002140010）；高等数学Ⅱ“课程思政”教学的探索与实践（2020 广东省教育厅教学质量与教学改革工程项目）；高等学校大学数学教学研究与发展中心教学改革项目（CMC20200216）

二、主要命题

下面论述中我们要用到以下引理，见 [1]。

引理 [1] 设 A,B 方阵满足关系式 $A,B=I$，I 为单位阵，则 A 可逆，其逆为 B。

该定理将逆矩阵的存在性转化为找一个方阵，使得 $A,B=I$，利用这种构造性方法，可以计算部分矩阵的逆矩阵。

注 1：存在性证明在数学中是一类非常重要的证明题，一般使用构造的方法将存在的对象构造出来。存在性的表述有很多的模式，有显性的模式，也有隐式的格式。本定理是显性形式，在实际中通常用来构造逆矩阵。

注 2：矩阵的逆是实数集里倒数的形式推广，也是函数里反函数的推广，也是变换存在反变换的推广，是一种非常重要的逆向思维活动，对于培养逆向思维有重要的参考价值。

注 3：本问题源于高等数学、线性代数课程教学中一些习题的讲解，也在最近几年研究生入学考试中也经常碰到类似问题的讨论，从特殊到一般，是研究问题的基本方法。

定理 1　设 A 方阵满足关系式 $A^2+pA=qI=0$，证明当 $a^2+pa+q\neq 0$ 时 $A-aI$ 可逆，其逆矩阵为：

$$-\frac{1}{a^2+ap+q}\left(A+(p+a)I\right)$$

证明一：利用构造法证明。B 由逆矩阵的定义，如果存在一个方阵使得 $AB=BA=I$，则 A 可逆，且 $A^{-1}=B$。由于 $A^2+pA+qI$，经过系列的计算有

$$(A-aI)(A+(p+a))I)=-(a^2+ap+q)I\ ,\quad (1)$$

两端取行列式，有 $|(A-aI)(A+(p+a))I)|=|-(a^2+ap+q)I\ |$，所以当 $a^2+pa+q\neq 0$ 有 $|A-aI|\neq 0$，故 $A-aI$ 可逆，由 (1) 显然有

$$(\boldsymbol{A}-aI)\left(-\frac{1}{a^2+ap+q}(A+(p+a)I)\right)=I,\quad (2)$$

所以 $A-aI$ 逆矩阵为 $-\frac{1}{a^2+ap+q}(A+(p+a)I)$。

由于一元多项式已有完备的理论，一元多项式中很多结论完全可以推广到以方阵为变元的矩阵多项式，其中多项式的因式分解理论在矩阵逆的计算中起着非常重要的作用，可运用多项式的带余除法讨论这类矩阵的逆矩阵计算问题。

证明二：利用多项式带余除法证明。令 $f(x)=x^2+px+q$，由带余除法有：$x^2+px+q=(x-a)(x+(p+a))+(a^2+ap+q)$，即 $(x-a)(x+(p+a))=-(a^2+ap+q)$，

所以当 $a^2+ap+q\neq 0$ 得到

$$(x-a)\left(-\frac{1}{a^2+ap+q}(x+(p+a))\right)=1,$$

与此对应的矩阵方程是：

$$(A-aI)\left(-\frac{1}{a^2+ap+q}(A+(p+a)I)\right)=I,$$

所以 $A-aI$ 逆矩阵为 $-\frac{1}{a^2+ap+q}(A+(p+a)I)$。

推论 1 若方阵 A 满足关系式 $A^2+pA+qI=0$，则当 $p^2-4q<0$ 时 $A-aI$ 可逆，其逆矩阵为 $-\frac{1}{a^2+ap+q}(A+(p+a)I)$

类似，对于满足三次矩阵方程的矩阵，其逆阵逆的计算有以下定理。

定理 2 若方阵 A 满足关系式 $A^3+aA^2+bA+cI=0$，则当 $\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c\neq 0$ 时可逆，其逆矩阵为

$$-\frac{1}{\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c}\left(A^2+(\lambda+a)A+(b+\lambda(\lambda+a))I\right)。$$

证 由于 $A^3+aA^2+bA+cI=0$，经过系列运算有

$(A-\lambda I)(A^2+(\lambda+a)A+(b+\lambda(\lambda+a))I)=-(\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c)I$

两端取行列式，有

$|(A-\lambda I)(A^2+(\lambda+a)A+(b+\lambda(\lambda+a))I)|=|-(\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c)I|$，所以当 $\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c\neq 0$ 有 $|A-aI|$，故可逆，显然有

$$(A-aI)\left(-\frac{1}{\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c}\left(A^2+(\lambda+a)A+(b+\lambda(\lambda+a))I\right)\right)=I$$

所以 $A-aI$ 逆矩阵为

$$-\frac{1}{\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c}\left(A^2+(\lambda+a)A+(b+\lambda(\lambda+a))I\right)。$$

更一般的，对于一般的 n 次矩阵方程，逆矩阵有以下结论。

定理 3 设方阵 A 满足关系式 $A^n+a_{n-1}A^{n-1}+a_{n-2}A^{n-2}+\cdots+a_1A+a_0I=0$，则当 $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+a_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+a_1\lambda+a_0I\neq 0$ 时 $A-\lambda I$ 可逆，其逆矩阵为

$-\frac{1}{b}\left(A^{n-1}+b_{n-2}A^{n-2}+\ldots+b_iA^i+\ldots+b_0I\right)$，其中

$b_i=\lambda^{n-1-i}+a_{n-1}\lambda^{n-2-i}+\ldots+\lambda^{n-k-i}a_{n-k+1}+\ldots+a_{i+1},n-1\geq i\geq 0$。

注 4 类似于定理 1、定理 2，运用带余除法可完成本命题的证明。

注 5 此类矩阵逆在线性方程组的求解、矩阵方程的求解、微分方程的求解、向量组的线性关系判断、矩阵的对角化等方面均有非常广泛的应用。

类似于这类矩阵逆的计算在高等代数教材、线性代数教材、近年研究生入学考试“高数（一）”等科目中都有大量的问题讨论。

上述情形的几个特例如下：

（1）幂零矩阵相关的逆阵。由 $A^2=0$ 有 $(A-aI)(A+aI)=-a^2I$，即 $(A-aI)\left(-\frac{1}{a^2}(A+aI)\right)=I$，所以当 $a\neq 0$ 时 $A-aI$ 可逆，其逆矩阵为 $\left(-\frac{1}{a^2}(A+aI)\right)$。

（2）等幂矩阵相关的逆阵。由 $A^2=A$ 有 $(A-aI)(A+(a-1)I)=-(a^2-1)I$，即 $(A-aI)\left(-\frac{1}{a^2-a}(A+(a-1)I)\right)=I$，所以当 $a^2-a\neq 0$ 时 $A-aI$ 可逆，其逆矩阵为 $\left(-\frac{1}{a^2-a}(A+(a-1)I)\right)$。

（3）三次幂零矩阵相关的逆阵。由 $A^3=0$ 有 $(A-aI)(A^2+aA+a^2I)=-a^3I$，即 $(A-aI)\left(-\frac{1}{a^3}(A^2+aA+a^2I)\right)=I$，所以当 $a\neq 0$ 时 $A-aI$ 可逆，其逆矩阵为 $-\frac{1}{a^3}(A^2+aA+a^2I)$。

（4）次幂零矩阵相关的逆阵。由 $A^n=0$ 有 $(A-aI)(A^{n-1}+aA^{n-2}+\cdots+a^{n-1}I)=-a^nI$，

即 $(A-aI)\left(-\frac{1}{a^n}(A^n+aA^{n-1}+\ldots+a^{n-1}I)\right)=I$，所以当 $a\neq 0$ 时 $A-aI$ 可逆，其逆矩阵为 $-\frac{1}{a^n}(A^n+aA^{n-1}+\ldots+a^{n-1}I)$。

三、结论

矩阵逆的计算是矩阵中的重点研究内容之一，计算方法多样，特殊情形特殊处理，矩阵逆在实际中有广泛的应用，本文从满足二次矩阵方程的矩阵逆计算出发，逐阶分析了满足一般满足 n 次矩阵方程的矩阵逆的存在性与计算，给出了相应的判别方法与逆矩阵计算算法，希望一方面对逆矩阵的计算有一定的参考与借鉴，另一方面对矩阵逆的教学设计特别是线性代数相关内容课程思政教学设计有一定的参考价值。

参考文献：

[1] 张禾瑞，郝柄新．高等代数（第五版）[M]．北京：高等教育出版社，2010.

[2] 黄玉兰．求逆矩阵方法小结 [J]．当代教育实践与教学研究，2018(07):208+212.

[3] 黄翔，汪春华．求逆矩阵的一般方法与补充 [J]．科技视界，2018(27):110-111.

[4] 陈建华，焦荣政．三对角矩阵求逆问题的思考——从一道课本习题谈起 [J]．大学数学，2020,36(01):104-109.

[5] 袁力，姜琴．一个矩阵多项式求逆问题的推广 [J]．四川文理学院学报，2013,23(05):15-17.

[6] 田贵月，李晓玲．关于矩阵求逆的教学设计 [J]．数学学习与研究，2021(17):12-13.

[7] 杨海霞，张会凌，吴应琴．用多项式除法求矩阵多项式的逆 [J]．科技风，2021(11):65-66.

[8] 冯福存．轮换矩阵可逆性的判定及其逆的计算 [J]．宁夏师范学院学报，2021,42(07):33-38.

[9] 杜晓宁，罗东，王闪闪．求逆矩阵的方法总结 [J]．佳木斯职业学院学报，2017(04):252-253.