doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2021.06.014

一道考研试题辅助函数构造的探讨

冯永平，邓明香
（广州大学 数学与信息科学学院，广东 广州 510006）

摘　要　本文探讨了 2020 年全国硕士研究生入学考试试题中一道有关构造辅助函数证明问题的多种方法，并给出了分析过程及简要的证明.

关键词　微分中值定理；罗尔定理；辅助函数

中图分类号　O13　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008-1399(2021)06-0038-03

On Constructing Auxiliary Functions for a Problem in the National Entrance Examination for Postgraduates

FENG Yongping and DENG Mingxiang
(School of Mathematics and Information Sciences, Guangzhou University, Guangzhou, Guangdong 510006, PRC)

Abstract　In this paper, methods of constructing auxiliary functions for proving a problem in the 2020 national entrance examination for postgraduates are discussed. The analysis process and brief proof are presented.

Keywords　mean-value theorem, Rolle's theorem, auxiliary function

1　引入

全国研究生入学考试中对运用高等数学知识解决实际问题的考查是一个重要环节，试题的难度、深度、广度对于高校制定人才培养方案、教学大纲、教学进度有着重要的指导意义. 总体上讲，研究生入学考试的难度高于正常教学中考试的难度，但要低于全国大学生数学竞赛等各类竞赛的难度. 考试大纲中要求掌握的知识面既广又博，部分综合题目是多个知识点的综合，对理工类、经管类、农林类专业考生有一定的难度. 这些综合题目不但要考查考生对基本知识的熟练掌握程度，并且要考查综合运用相关知识点的能力，这也是研究生入学选拔考试的初衷.

大部分备考考生由于进行了大量的训练，对于计算型的题目一般容易得分，但对于证明性的问题或带有综合性的证明问题，多数考生觉得无处下笔，很难取得理想的成绩. 在大学相关教材中对如何运用构造方法证明问题有简单的讲解(见[1,2])，也有部分专家整理了如何运用构造方法证明函数分析类问题. 如文[3]探讨了证明微分中值定理相关命题时如何巧妙的构造辅助函数简化命题的证明，文[4]讨论了如何恰当的构造辅助函数运用罗尔定理简化问题证明，文[5]讨论了证明积分有关问题时如何巧妙构造辅助函数简化命题的证明.

多年来，在研究生入学考试中或各个大学的研究生专业考试中，微分中值类定理相关命题的证明一般是必考的内容. 这类题目既可以考查学生的基本功及实践创新能力，又能够考查考生对相关内容的熟练掌握及应用程度. 近几年这类运用构造辅助函数的方法证明相关问题的题目，学生的失分率普遍较高. 2020 年研究生入学考试高等数学二试题中一道关于运用相关方法证明存在性的问题，大部分

收稿日期：2020-10-　　**修改日期**：2020-10-
基金项目：高等学校大学数学教学研究与发展中心教学改革项目(CMC20200216)，2020 年度广州大学"课程思政"示范教学团队建设项目(广大教务【2020】40 号).
作者简介：冯永平(1975-)，男，甘肃甘谷，理学博士，教授，微分方程数值解，Email：fypmath@gzhu.edu.cn；
邓明香(1974-)，女，甘肃秦安，理学硕士，讲师，微分方程数值解，Email：dmx@gzhu.edu.cn.

考生失分率较高. 本文就该题目如何运用辅助函数方法证明进行了系统分析、归纳整理，希望对备考的考生或高校师生教学有一定的指导意义.

2. 问题及构造方法归纳

2020 年全国研究生入学考试"高等数学二试卷"第 20 题题目如下[6]：

设函数 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}\mathrm{d}t, x\in\mathbf{R}$，证明：

(1) $\exists\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$；

(2) $\exists\eta\in(1,2)$，使得 $f(2)=\eta e^{\eta^2}\ln 2$.

本题是考查积分变上限函数性质与微分中值定理应用的综合性问题，是考查如何证明存在某一"点"使得该点处的函数值满足某一"等式"的问题，简单讲是证明"点的存在性"问题. 一般来讲该类问题常用的方法有闭区间上连续函数的性质、微分中值定理、积分中值定理等，不论运用何种方法，关键在于"构造辅助函数"[7].

本题的证明，并不是着眼于完成某一道题目，关键是如何分析问题. 证明中有两个关键点，第一是存在性的证明，在数学上一般通过构造式证明或反面证明存在性；第二个是如何找切入点"构造函数"，不同的思考模式及切入点对应着不同的构造方法. 故本题关键在于如何通过分析. 找函数构造的切入点，这正是教学过程中的重点内容. 如何尽快找到问题的切入点，对经管、农林、生化类专业的学生有一定的难度. 本文重在通过分析将要证明的结论进行转化以找到切入点"构造辅助函数"，希望对学生的备考和高校教师教学起到抛砖引玉的作用.

本题的证明用到了以下定理或推论.

定理 1[2,定理4.7]（零点存在定理）　若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，并且端点函数值异号 $(f(a)f(b)<0)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

定理 2[2,定理6.1]（罗尔定理）　若函数 $f(x)$ 满足：

1) 在区间 $[a,b]$ 上连续；

2) 在区间 (a,b) 内可导；

3) $f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

定理 3[2,定理6.2]（拉格朗日中值定理）　若函数 $f(x)$ 满足：

(1) 在区间 $[a,b]$ 上连续；

2) 在区间 (a,b) 内可导，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

定理 4[2,定理6.6]（柯西中值定理）　若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

1) 在区间 $[a,b]$ 上连续；

2) 在区间 (a,b) 内可导；

3) $(g'(x))^2\neq 0$；

4) $g(a)\neq g(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

第一小问的证明有如下一些方法：

(Ⅰ) 运用闭区间上连续函数的零点存在定理

分析　用零点存在定理证明的关键是把要证明的结论转化为某一函数的零点存在性问题，证明结论等价于找一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)-(2-\xi)e^{\xi^2}=0$，即证明函数 $f(x)-(2-x)e^{x^2}$ 的零点存在性.

证明　令

$$F(x)=f(x)-(2-x)e^{x^2},\ x\in[1,2],$$

由 $f(x)$ 的定义及 $e^{x^2}>0$，易证明：$F(x)$ 在 $x\in[1,2]$ 连续且 $F(1)F(2)<0$，所以由闭区间上连续函数的零点存在定理，命题成立.

注　运用该方法辅助函数还可以如下构造：

$$F(x)=f(x)+(x-2)f'(x),\ x\in[1,2];$$

或

$$F(x)=(2-x)f'(x)-f(x),\ x\in[1,2];$$

或

$$F(x)=(2-x)e^{x^2}-f(x),\ x\in[1,2].$$

(Ⅱ) 运用罗尔定理

分析　运用罗尔定理证明的关键是把要证明的结论转化变形为某一函数的导函数零点存在性问题，由变上限积分函数的性质知，证明结论等价于找一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)-(2-\xi)f'(\xi)=0$，即 $(f(x)(2-x))'|_{x=\xi}=0$，即证明函数 $f(x)(2-x)$ 的导数零点存在性问题.

证明　令

$$F(x)=f(x)(2-x),\ x\in[1,2],$$

由 $f(x)$ 的定义易证明：$F(x)$ 在 $x\in[1,2]$ 连续，在 $x\in(1,2)$ 可导，且 $F(1)=F(2)=0$，由罗尔定理，至少 $\exists\xi\in(1,2)$ 使得 $F'(\xi)=0$，即

$$F'(\xi)=f'(\xi)(2-\xi)-f(\xi)$$
$$=e^{\xi^2}(2-\xi)-f(\xi)=0,$$

命题得证.

注 运用该方法辅助函数还可以如下构造:

$$F(x)=(x-2)f(x),\ x\in[1,2];$$

或

$$F(x)=e^{(x-2)f(x)},\ x\in[1,2];$$

或

$$F(x)=\ln((2-x)f(x)),\ x\in(1,2).$$

(Ⅲ)运用柯西中值定理

分析 运用柯西中值定理证明的关键是将证明的结论转化变形为两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在某点的导数之比问题,其余常数可构造为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的端点函数值差的比值,需要很强的观察能力.由变上限积分函数的性质知,证明结论等价于找一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=2f'(\xi)$,注意到左侧为 $(xf(x))'|_{x=\xi}$,所以等价于证明

$$\left.\frac{(xf(x))'}{f'(x)}\right|_{x=\xi}=2=\frac{2\cdot f(2)-1\cdot f(1)}{f(2)-f(1)},$$

即证明函数 $xf(x)$ 和 $f(x)$ 满足柯西中值定理条件的问题.

证明 令

$$F(x)=xf(x),\ G(x)=f(x),\ x\in[1,2],$$

易证明:$F(x),G(x)$ 在 $x\in[1,2]$ 满足柯西中值定理的条件,由柯西中值定理,至少 $\exists\xi\in(1,2)$ 使得

$$\frac{F(2)-F(1)}{G(2)-G(1)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

整理后即 $e^{\xi^2}(2-\xi)-f(\xi)=0$,命题得证.

(Ⅳ)运用积分中值定理

分析 运用积分中值定理证明的关键是把要证明的结论转化变形为某一函数的积分或某一二元函数的二重积分,使用连续函数积分中值定理证明,这类方法需有很强的观察能力与构造能力.由变上限积分函数的性质知,证明结论等价于找一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)-(2-\xi)f'(\xi)=0$,即

$$f(\xi)(2-1)=(2-\xi)e^{\xi^2},$$

基于这种变形考查积分 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的计算,由 $f(x)$ 的定义,再将定积分换为累次积分,利用累次积分交换次序证明该问题.

证明 考虑定积分 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$,由 $f(x)$ 的定义有 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^x e^{y^2}\mathrm{d}y$,右边的积分对变量 y 无法积分,交换积分次序后有

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2 e^{y^2}\mathrm{d}x=\int_1^2(2-y)e^{y^2}\mathrm{d}y,$$

同时变换为区间 $[1,2]$ 上的积分,故有

$$\int_1^2\left(f(y)-(2-y)e^{y^2}\right)\mathrm{d}y=0,$$

又由于函数 $f(y)-(2-y)e^{y^2}$ 在 $[1,2]$ 上连续,所以由积分中值定理,至少存在一点 $\xi\in(1,2)$ 使得

$$e^{\xi^2}(2-\xi)-f(\xi)=0,$$

从而命题得证.

第二小问的证明有如下一些方法:

(Ⅰ)运用闭区间上连续函数的零点存在定理或介值性定理

分析 运用零点存在定理证明的关键是把要证明的结论转化为某一函数的零点存在性问题,证明结论等价于找一点 $\eta\in(a,b)$ 使得

$$f(2)-\ln2\cdot\eta\cdot e^{\eta^2}=0,$$

即证明函数 $f(2)-\ln2\cdot x\cdot e^{x^2}$ 的零点存在性问题.

证明 令

$$F(x)=f(2)-\ln2\cdot x\cdot e^{x^2},\ x\in[1,2],$$

由 $f(x)$ 的定义及 $e^{x^2}>0$,易证明:$F(x)$ 在 $x\in[1,2]$ 连续且 $F(1)F(2)<0$,所以由闭区间上连续函数的零点存在定理,命题成立.

注 运用该方法辅助函数还可以如下构造:

$$F(x)=f(2)-\ln2\cdot x\cdot f'(x)$$

或

$$F(x)=f(2)-\frac{\ln2}{2}f''(x).$$

(Ⅱ)运用罗尔定理

分析 运用罗尔定理证明的关键是把要证明的结论转化变形为某一函数的导函数零点存在性问题,由变上限积分函数的性质知,证明结论等价于找一点 $\eta\in(a,b)$ 使得

$$f(2)\frac{1}{\eta}-\ln2f'(\eta)$$
$$=(f(2)\cdot\ln x-\ln2\cdot f(x))'|_{x=\eta}=0,$$

即证明函数 $f(2)\cdot\ln x-\ln2\cdot f(x)$ 的导数的零点存在性问题.令

$$F(x)=f(2)\ln x-\ln2\cdot f(x),\ x\in[1,2],$$

由 $f(x)$ 的定义易证明:$F(x)$ 在 $x\in[1,2]$ 连续,在 $x\in(1,2)$ 可导,且 $F(1)=F(2)=0$,由罗尔定理,至少 $\exists\eta\in(1,2)$ 使得 $F'(\eta)=0$,即

(下转第31页)

x^{-C-1}，因而

$$(x^{-C}F(x))' = x^{-C-1}(xF'(x) - CF(x)) \leqslant 0 \quad (\forall x \in (0,1]).$$

易见 $x^{-C}F(x)$ 在 $[\delta,1]$ 上是单调递减函数，其中 $\delta \in (0,1)$，故 $F(1) \leqslant \frac{F(\delta)}{\delta^C}$. 令 $\delta \to 0^+$，可得 $F(1) \leqslant \lim\limits_{\delta\to 0^+} \frac{F(\delta)}{\delta^C}$. 利用洛必达法则，可得

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{F(\delta)}{\delta^C} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{|f(\delta)|}{C\delta^C}.$$

对于任何一个正数 C，都存在一个非负整数 n 使得 $n \leqslant C < n+1$. 当 $\delta \in (0,1)$ 时，我们有

$$\frac{|f(\delta)|}{C\delta^n} \leqslant \frac{|f(\delta)|}{C\delta^C} \leqslant \frac{|f(\delta)|}{C\delta^{n+1}}.$$

利用夹逼原理和问题(i) 的结论，可知

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{|f(\delta)|}{C\delta^C} = 0.$$

从而 $F(1) = 0$. 由于 $F(x)$ 是 $[0,1]$ 上的单调递增的非负函数，因而 $F(x) \equiv 0$. 再由(2) 可知，$f(x) \equiv 0$.

证 2　首先将(1) 转化为(3)，同 1. 由于实际上 $F(x) \equiv 0$，我们并不能直接采用分离变量法. 因此，若采用分离变量法，需要将 $F(x)$ 变成一个正函数. 由此，我们令 $F_\varepsilon(x) = F(x) + \varepsilon$，其中 $\varepsilon > 0$，则

$$xF_\varepsilon'(x) = xF'(x) \leqslant CF(x) \leqslant CF_\varepsilon(x) \quad (\forall x \in [0,1]). \tag{5}$$

由于 $F_\varepsilon(x) > 0$，(5) 可转化为

$$[\ln F_\varepsilon(x)]' = \frac{F_\varepsilon'(x)}{F_\varepsilon(x)} \leqslant \frac{C}{x} \quad (\forall x \in (0,1]). \tag{6}$$

对(6)式两边从 δ 到 1 上积分，其中 $\delta \in (0,1)$，可得 $F_\varepsilon(1) \leqslant \frac{F_\varepsilon(\delta)}{\delta^C}$. 令 $\varepsilon \to 0^+$，有 $F(1) \leqslant \frac{F(\delta)}{\delta^C}$. 以下证明同 1.

参考文献

[1]　裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2006.

(上接第 40 页)

$$F'(\eta) = \frac{f(2)}{\eta} - \ln 2 \cdot e^{\eta^2} = 0,$$

命题得证.

注　运用该方法辅助函数还可以如下构造：

$$F(x) = f(x) - \frac{f(2)}{\ln 2}\ln x,\ x \in [1,2].$$

(Ⅲ)运用柯西中值定理

分析　运用柯西中值定理证明的关键是把要证明的结论转化变形为两个函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 在某点的导数之比问题，其余常数可构造为 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的端点函数值差的比值. 由变上限积分函数的性质知，证明结论等价于找一点 $\eta \in (1,2)$ 使得 $\frac{f(2)}{\ln 2} = \frac{e^{\eta^2}}{\frac{1}{\eta}}$，观察到 $\frac{f(2)}{\ln 2} = \frac{f(2)-f(1)}{\ln 2 - \ln 1}$，所以等价于证明 $\left.\frac{(f(x))'}{(\ln x)'}\right|_{x=\eta} = \frac{f(2)-f(1)}{\ln(2)-\ln(1)}$，即证明函数 $f(x)$，$\ln x$ 满足柯西中值定理条件的问题.

证明　令

$$F(x) = f(x),\ G(x) = \ln x,\ x \in [1,2],$$

易证明：$F(x)$，$G(x)$ 在 $x \in [1,2]$ 满足柯西中值定理的条件，由柯西中值定理，至少存在一点 $\eta \in (1,2)$ 使得 $\frac{F(2)-F(1)}{G(2)-G(1)} = \frac{F'(\eta)}{G'(\eta)}$，整理后即 $f(2) = \eta e^{\eta^2}\ln 2$，命题得证.

3　小结

零点存在定理和微分中值定理是高等数学中非常重要的内容，在分析函数性质方面有广泛的应用. 如何构造辅助函数并运用零点存在定理和微分中值定理证明各种存在性问题需要较强的技巧，只有经过大量的训练才能掌握. 辅助函数构造中包含了丰富的数学思想方法，诸如逆向思维、异向思维、发散思维等多种思维方法.

参考文献

[1]　陈纪修，於崇华，金路. 数学分析[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2004.

[2]　华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京：高等教育出版社，2014.

[3]　李山. 微分中值定理及辅助函数[J]. 宿州教育学院学报，2001，(2)：99－101.

[4]　王艳萍，余学军. 应用罗尔定理时的一种辅助函数构造法[J]. 南阳师范学院报，2003：1－2.

[5]　黄淑林. 浅谈构造法在微积分中的应用[J]. 广西民族学院学报，2002，(3)：180－182.

[6]　2020 年全国硕士研究生入统一考试数学二试题，https://wenku.baidu.com/view/1620e6162079168884868762caaedd3382c4b558.html.

[7]　裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法究[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2006.