# 第二章 导数与微分

## 习 题 课

一、主要内容框图

二、典型例题

# 一、主要内容框图

关系 $\frac{dy}{dx}=y' \Leftrightarrow dy=y'dx \Leftrightarrow \Delta y=dy+o(\Delta x)$

导数

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

基本公式

高阶导数

微分

$dy=y'\Delta x$

运算法则

## 二、典型例题

**例1** 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)\Lambda\ (x-100)$, 求 $f'(0)$.

**解1** $$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\Lambda\ (x-100) = 100!$$

**解2** $$f'(x) = (x-1)\Lambda\ (x-100) + x[(x-1)\Lambda\ (x-100)]'$$

$$f'(0) = (-1)(-2)\Lambda\ (-100) = 100!$$

**例2** 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$，求 $f'(2)$.

**解** $$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\left[(x-2)\cdot\frac{f(x)}{(x-2)}\right]=0$$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$$

**例3** 若 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{(e^x-1)\tan x}$.

**解** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}(\sin^2 x+\cos x)=1$ 且 $f(1)=0$

联想到凑导数的定义式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x+\cos x-1)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=f'(1)\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f'(1)$$

**例4** 设$f(x)=x|x(x-2)|$,求 $f'(x)$.

**解** 先去掉绝对值

$$f(x)=\begin{cases} x^2(x-2), & x\le 0 \\ -x^2(x-2), & 0<x<2, \\ x^2(x-2), & x\ge 2 \end{cases}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2(x-2)}{x}=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{-x^2(x-2)}{x}=0,$$

$f'_-(0)=f'_+(0)=0$, $f'(0)=0$;

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2(x-2)}{x-2}=-4,$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2(x-2)}{x-2}=4,$$

$f'_-(2)\ne f'_+(2)$,

$\therefore f(x)$在$x=2$处不可导.

**例4** 设$f(x)=x|x(x-2)|$,求 $f'(x)$.

**解** 先去掉绝对值

$$f(x)=\begin{cases} x^2(x-2), & x\le 0 \\ -x^2(x-2), & 0<x<2, \\ x^2(x-2), & x\ge 2 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-4x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ -3x^2+4x, & 0<x<2 \\ 3x^2-4x, & x>2 \end{cases}.$$

$f'_-(0)=f'_+(0)=0,\ f'(0)=0;$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2(x-2)}{x-2}=-4,$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2(x-2)}{x-2}=4,$$

$f'_-(2)\neq f'_+(2),$

$\therefore f(x)$在$x=2$处不可导.

**例5** 设 $y = e^{\sin x}\sin e^x + f(\arctan\frac{1}{x})$，其中 $f(x)$ 可微，求 $y'$.

**解**

$$y' = \sin e^x \cdot (e^{\sin x})' + e^{\sin x}(\sin e^x)'$$

$$+ f'(\arctan\frac{1}{x})(\arctan\frac{1}{x})'$$

$$= \sin e^x \cdot e^{\sin x}(\sin x)' + e^{\sin x}\cdot\cos e^x\cdot(e^x)'$$

$$+ f'(\arctan\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot(\frac{1}{x})'$$

$$= e^{\sin x}(\cos x\sin e^x + e^x\cos e^x)$$

$$-\frac{1}{x^2+1}f'(\arctan\frac{1}{x})$$

**例6** 设 $y=\sin^2\ln(e^x+x)$, 求 $\mathrm{d}y$.

**解** $y'=2\sin\ln(e^x+x)\cdot[\sin\ln(e^x+x)]'$

$$=2\sin\ln(e^x+x)\cdot[\cos\ln(e^x+x)]\cdot[\ln(e^x+x)]'$$

$$=\sin[2\ln(e^x+x)]\cdot\frac{1}{e^x+x}\cdot(e^x+x)'$$

$$=\frac{e^x+1}{e^x+x}\sin[2\ln(e^x+x)],$$

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\frac{e^x+1}{e^x+x}\sin[2\ln(e^x+x)]\,\mathrm{d}x.$$

**例7** 设函数 $y=f(x)$由方程$\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}\,(x>0,y>0)$

所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

**解** 两边取对数 $\dfrac{1}{x}\ln y=\dfrac{1}{y}\ln x$，即$y\ln y=x\ln x$，

$\therefore (\ln y+1)y'=\ln x+1$， $y'=\dfrac{\ln x+1}{\ln y+1}$，

$$y''=\frac{\dfrac{1}{x}(\ln y+1)-(\ln x+1)\dfrac{1}{y}\cdot y'}{(\ln y+1)^2}$$

$$=\frac{y(\ln y+1)^2-x(\ln x+1)^2}{xy(\ln y+1)^3}$$

**例8** 设$y = x(\sin x)^{\cos x}$，求 $y'$.

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$$

**解** $y' = y(\ln y)'$

$$= y(\ln x + \cos x \ln \sin x)'$$

$$= x(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{1}{x} - \sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$$

**例9** $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

**解** $$\frac{dy}{dx} = \frac{[a(1-\cos t)]'}{[a(t-\sin t)]'} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t = \frac{\cos t\cdot(1-\cos t) - \sin t\cdot(\sin t)}{(1-\cos t)^2} = \frac{1}{\cos t - 1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'(t)} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

**例10** 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \quad (0 < \varepsilon < 1) \end{cases}$

确定函数 $y = y(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

**解** 方程组两边对 $t$ 求导, 得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + 2 \\ 2t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \varepsilon \cos y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}$$

**例11** 设$y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$,求 $y^{(n)}$.

**解** $$y=\frac{4x^2-1}{x^2-1}=\frac{4x^2-4+3}{x^2-1}$$

$$=4+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\Theta\ \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}},\quad \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

$$\therefore\ y^{(n)}=\frac{3}{2}(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

**例12** 求曲线 $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$ 在 $t=2$ 相应的点处的切线方程

**解** 切点坐标为 $\left(\dfrac{6a}{5}, \dfrac{12a}{5}\right)$,

$$x'(t) = \frac{3a(1+t^2) - 3at\cdot 2t}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{3a(1-t^2)}{(1+t^2)^2},$$

$$y'(t) = \frac{6at(1+t^2) - 3at^2\cdot 2t}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{6at}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2} = -\frac{4}{3},$$

切线方程为

$$y - \frac{12a}{5} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{6a}{5}\right),$$

即 $4x + 3y - 12a = 0.$

# 测 试 题

## 一、求下列函数的导数:

(1) $y = \arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

(2) $y = \cos^2(e^x + e^{-x})$;

(3) $y = x\sqrt{x^2-1} - \ln(x + \sqrt{x^2-1})$;

(4) $y = \sqrt{x^2-1} - \arccos\dfrac{1}{x}\ (x > 1)$;

(5) $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

# 测 试 题

二、$\begin{cases} x = t^3 + 3t \\ y = t^5 - 5t \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dt^2}, \dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx}), \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

三、求曲线 $\begin{cases} e^x = 3t^2 + 2t + 1 \\ t\sin y - y + \dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$ 在 $t = 0$

相应的点处的切线方程.

四、$f(x) = \begin{cases} e^x + x, & x \le 0 \\ 2\sin x + a, & x > 0 \end{cases}$，求 $f'(x)$.

# 测 试 题

五、 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+a, & x<0 \\ e^x+b\sin x, & x\ge 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 可导，

求 $a$， $b$ 的值.

六、 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+\ln x}{x^2-1}=3$，

求 $f'(1)$.

# 测试题解答

一、求下列函数的导数:

(1) $y = \arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(1) $y' = -\dfrac{2x}{1+x^4}$;

(2) $y = \cos^2(e^x + e^{-x})$;　　(2) $y' = (e^{-x} - e^x)\sin 2(e^x + e^{-x})$;

(3) $y = x\sqrt{x^2-1} - \ln(x + \sqrt{x^2-1})$;　　(3) $y' = 2\sqrt{x^2-1}$;

(4) $y = \sqrt{x^2-1} - \arccos\dfrac{1}{x}\ (x > 1)$;　　(4) $y' = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$;

(5) $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.　　(5) $y' = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\dfrac{x}{1+x} + \dfrac{1}{1+x}\right)$.

二、$\begin{cases} x = t^3 + 3t \\ y = t^5 - 5t \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dt^2}, \dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx}), \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\dfrac{dy}{dt} = 5t^4 - 5, \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = 20t^3,$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 3, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{5t^4 - 5}{3t^2 + 3} = \frac{5}{3}(t^2 - 1),$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx}) = [\frac{5}{3}(t^2 - 1)]' = \frac{10}{3}t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\frac{dy}{dx})'_t}{x'(t)} = \frac{10t}{9(t^2 + 1)}.$$

三、 求曲线 $\begin{cases} e^x = 3t^2 + 2t + 1 \\ t\sin y - y + \dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$ 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程.

**解** $e^x \dfrac{dx}{dt} = 6t + 2$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{6t+2}{e^x}$,

$\sin y + t\cos y \cdot \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = 0$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\sin y}{1 - t\cos y}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{e^x \sin y}{(6t+2)(1-t\cos y)},$$

$t = 0, x = 0, y = \dfrac{\pi}{2}$, $k = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0, x=0, y=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2}$,

所求切线方程为 $y - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{2}x$.

四、 $f(x)=\begin{cases} e^x+x, & x\le 0 \\ 2\sin x+a, & x>0 \end{cases}$，求 $f'(x)$.

**解** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=1,$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=a,$

1. 当$a\neq 1$时, $f(x)$ 在点$x=0$不连续, 从而不可导.

$$f'(x)=\begin{cases} e^x+1, & x<0 \\ 2\cos x, & x>0 \end{cases}.$$

2. 当$a=1$时,

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+x-1}{x}=2,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x+a-1}{x}=2,$$

$\because f'_-(0)=f'_+(0)=2,$

$\therefore f'(0)=2,$

$$f'(x)=\begin{cases} e^x+1, & x\le 0 \\ 2\cos x, & x>0 \end{cases}.$$

五、设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+a, & x<0 \\ e^x+b\sin x, & x\geq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 可导，

求 $a$，$b$ 的值.

**解** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=a,\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1,$

因 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, 从而连续, 于是 $a=1$.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x}=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+b\sin x-1}{x}=1+b,$$

由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, 得 $b+1=0$, $b=-1$.

六、 设 $f(x)$在 $x=1$处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+\ln x}{x^2-1}=3$，求 $f'(1)$.

**解** $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+\ln x]=0 \Longrightarrow f(1)=0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}+\frac{1}{2}=3$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=5$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=5$$