§1.11 连续函数的运算与初等函数的连续性

一、连续函数的和、积及商的连续性

二、反函数与复合函数的连续性

三、初等函数的连续性

一、连续函数的和、积及商的连续性

❖定理1

设函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0连续, 则函数

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (\text{当 } g(x_0)\neq 0 \text{ 时})$$

在点x_0也连续.

例1　因为$\sin x$和$\cos x$都在区间$(-\infty, +\infty)$内连续, 所以$\tan x$和$\cot x$在它们的定义域内是连续的.

三角函数 $\sin x$、$\cos x$、$\sec x$、$\csc x$、$\tan x$、$\cot x$ 在其有定义的区间内都是连续的.

二、反函数与复合函数的连续性

❖定理2

单调、连续函数的反函数也是单调、连续的.

例2 由于 $y=\sin x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调增加且连续,

所以它的反函数 $y=\arcsin x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上也是连续的.

同样, $y=\arccos x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上是连续的.

$y=\arctan x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的.

$y=\text{arccot}\, x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的.

❖定理3

设$\lim\limits_{x\to a} g(x)=u_0$,函数$f(x)$在点$u_0$连续,则有

$$\lim_{x\to a} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0).$$

❖定理3的应用形式

$$\lim_{x\to a} f[g(x)]=f[\lim_{x\to a} g(x)].$$

例3 求$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{\sin x}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{\sin x}{x}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=1.$

❖定理4

若函数$u=g(x)$在点x_0连续, 函数$y=f(u)$在点$u_0=g(x_0)$连续, 则复合函数$y=f[g(x)]$在点x_0也连续.

三、初等函数的连续性

❖结论

基本初等函数在它们的定义域内都是连续的.

一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

例4 求 $y=\ln(x-1)+\dfrac{1}{x^2-4}$ 的连续区间.

解 由 $\begin{cases} x-1>0 \\ x^2-4\neq 0 \end{cases}$, 得定义域为 $(1,2)\cup(2,+\infty)$,

所求连续区间为 $(1,2)$、$(2,+\infty)$.

注:

所谓定义区间, 就是包含在定义域内的区间.

例5 设 $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{1}{\sin x}}, & x<0 \\ e^{A\cos x}+x, & x\geq 0\end{cases}$, 确定常数 A 的值, 使 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

解 当 $x\neq 0$ 时, $f(x)$ 连续.

要使 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 当且仅当 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续. 于是

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0),$$

而 $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0^-}[(1-x)^{-\frac{1}{x}}]^{-\frac{x}{\sin x}}=e^{-1},$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=e^{A},$$

得 $e^{A}=e^{-1}$, $A=-1$.

❖利用连续性求极限举例

例6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{0}{2}=0.$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解 $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$$

❖利用连续性求极限举例

例8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$.

例9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

解 令$a^x-1=t$，则$x=\log_a(1+t)$，$x\to 0$时$t\to 0$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\ln a.$$

❖常用等价无穷小 当$x\to 0$时,有

$$\boxed{\begin{gathered} x\sim(\arcsin)\sin x\sim(\arctan)\tan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1, \\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ (1+x)^\mu-1\sim\mu x(\mu\neq 0). \end{gathered}}$$

例10 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt[3]{1+\ln(1+x)}-1)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt[3]{1+\ln(1+x)}-1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{3}\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{3}x}=3.$$

作 业

习题1–11 (P78):

2.(4)(5)